



TITLE:

氣體中に於ける弾性電子散亂

AUTHOR(S):

McMillen, J. Howard; 石川, 義興 [譯]

---

CITATION:

McMillen, J. Howard ...[et al]. 氣體中に於ける弾性電子散亂. 物理化學の進歩 1940, 14(5): 224-247

ISSUE DATE:

1940-10-31

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/46244>

RIGHT:

# 氣體中に於ける弾性電子散亂\*

J. Howard McMillen

石川 義典 譯

## 1. 緒 論

本文は1927年頃より文献に現れ初めた電子と氣體分子の弾性衝突に關する一團の研究の批判である。此等の研究に於て整然と方向づけた電子線を氣體を充填した室に貫通させ、この電子線から種々の角度に散亂する電子の數を測定した。この分野の最初の研究者は斯る實驗より次の二つの事柄を確立しようとした。その一つは原子構造に關する智識を増すことで、他は電子線がそれに結合してゐるド・ブロイ波長の大きさと同程度の原子に依つて散亂せられた時の電子線の軌動を決定することである。この場合電子が略々探針の役目を果してゐる。原子の靜電場がその探られる領域である。電子を探針とする考へ方が實驗者に首肯せられるのは電子エネルギーを適當に加減して探らうとする原子の部分を選択し得るからである。例へばアルゴン原子の L 及び M 核を探るには50電子ボルト附近のエネルギーを持つた電子を用ひる。核附近の範圍を研究するにはもつと早い電子、キロボルト程度の電子エネルギーを用ひる。これ等の實驗結果に依れば殆んど凡ゆる場合原子の場が波動力學の最有效な手段から豫言せられ得る様な場であることと示してゐる。この原子構造に關する重要な確證の外に、此等の實驗は更に原子電子衝突に關する古典的な粒子理論が不適當であることを明瞭にした。但し電子が非常に高速度で進行するときはその限りではない。これに反して波動論が散亂實驗の解析上有效であつたのでこれ等の實驗は電子傳播の波動論の重要な實驗的根據と考へられるに至つた。

## 2 粒子としての電子散亂

電子を探針とする考へ方は勿論電子線が電子の粒から出来てゐると考へて首肯出来ることで、ド・ブロイ電子波を考へてゐるのではない。古典粒子論よりすれば散亂經過は衝突電子は原子の内で曲線を描く、これは電子が中心に向つて或る種の求心靜電引力に依つて引かれるからである。散亂角  $\theta$  は原子より離れる電子放射通路と電子の最初の方向の爲す角とするとこの角の大きさは電子が通過する場の種類に依つて定まり且つ電子が最初如何に早く動いてゐるか、散亂原子への近づき方に依つて定まる。後者の因子は衝突パラメーター  $P$  に依つて表はす。 $P$  は原子の中心と假りに電子が曲げられることなく通つたならばその電子通路と原子間の最短距離として定義せられる。凡ゆる近づき方が出来るから、換言すれば凡ゆる  $P$  の値が取り得るから問題は  $\theta$  と  $P$  との關係を見出すことになる。この關係は  $\theta$  と  $\theta + d\theta$  の間に原子によつて散亂せられる電子の通路の數を決定する。粒子散亂の問題は散亂原子内に於ける電子通路の分配を見付けることに歸する。原子内の力の場が若し逆自乗法則に従ふならば即ち裸の核を伴ふ場であるならばその通路は散亂中心を焦點とする雙曲線を描く。この時の散亂角と衝突パラメーターの關係は次に與へられる。

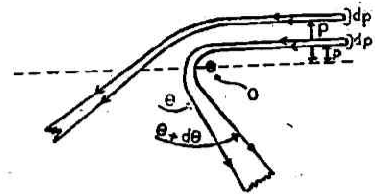
$$\tan \theta/2 = 2Ze^2/EP \quad (1)$$

$Ze$  核の荷電

$E$  電子の最初の運動エネルギー

\* *Rev. Mod. Phys.*, 11, 84—110 (1939).

第1圖は裸の核の場合により屈曲する粒子通路を示す。凡ゆる電子の近づき方が同時に可能である。場の引力より前進速度が大であるので大部分の電子は裸の核による場を通過してその通路を殆んど曲げない。散亂角は  $\text{cosec}^2(\theta/2)$  の法則に従ふ。



第1圖 裸の核Oを囲むクーロム場に於ける電子通路模型圖

粒子論に於ては各々の電子の位置は散亂過程を通じて知れてゐることが判る。各散亂電子は一定方向から近づき衝突パラメーターPを持ち散亂場の一定の通路を通過する。例へば500ボルトの電子は水素原子核に依つて $120^\circ$ に散亂せられる時には宛も核を $0.033\text{\AA}$ の距離で通過するかの如くに核に近づく。その軌道の頂點に於て核に $0.013\text{\AA}$ 迄接近して雙曲軌道を書く。

角度 $\theta$ に於て單位立體角内に散亂せられる電子の數は中心電場が $Ze^2/r^2$ の如く變る時は

$$I(\theta) = Z^2 e^4 \text{cosec}^4(\theta/2) / 16E^2 \quad (2)$$

上の式で表はされる。この式は Rutherford が $\alpha$ 粒子の原子核による散亂に對して提出したものである。一般に中心の場に他の力が働く時にはその通路は次式によつて與へられる。

$$I(\theta) = (J/m^2 v^2 \sin \theta) (dJ/d\theta)$$

Jは次式より得られる。

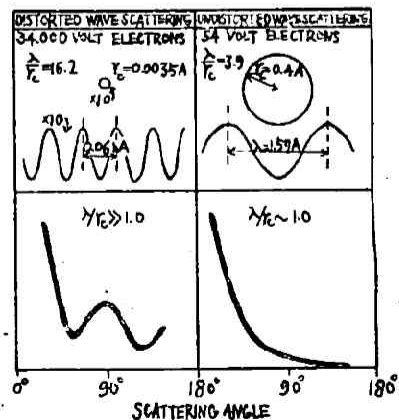
$$\theta/2 - \pi/2 - \int_m^\infty (\partial/\partial J) (2m(E-V) - J^2/r^2)^{1/2} dr = 0$$

### 3 電子波の散亂

散亂の波動理論に於ては散亂室に向つて入る電子線は $\lambda = h/mv$ なる波長を持つ平面波を表はす。此處に述べる實驗では電子エネルギーは大體1~1000電子ボルトの範圍であるのでこれに結合してゐるドブロイ波長は $\frac{1}{2}\text{\AA}$ から $10\text{\AA}$ 迄變化する。この波長は大體原子の大きさに匹敵するので散亂現象の説明には廻折現象が含まれる。上の様な考へ方を取ると多くの散亂理論は二つの解法をとる様になる。その一つは Rayleigh の音波の小球に依る散亂の解法及び Mie-Debye の小球による光波の散亂理論によく似てゐる。他の解法は光の散亂に適用されてゐる Huygens の方法の應用である。

この二つの理論の適用する條件を知るには先づ電子-原子衝突理論に於て用ひられてゐる“原子の大きさ”を定義しなければならぬ。此處に云ふ“大きさ”は原子の場の廣さのみならず衝突する電子のエネルギーに依つても變る。即ち原子のポテンシャルの場が數値的に電子の初めの運動のエネルギーに等しい距離を“大きさ”として定義する。有效な“大きさ” $r_e$ はそれ故に變通自在で衝突電子の速度が早い程その大きさが減少する。

衝突電子の波長 $\lambda_0$ と有効“大きさ” $r_e$ の比より上の二つの波動理論の何れをとるべきかと決定出来る。 $\lambda_0/r_e$ が略1である時は平面入射波の振幅は散亂原子を通過した後も實際には不變である。この事實は入射波を原子の場の何れの場所に於てもその平面波を  $\exp$



第2圖 歪曲並びに非歪曲波散亂を表すアルゴンの散亂曲線

(ikz) で表はすことである。

然し  $\lambda_0 \gg r_0$  ならば上の假定は成立しない、入射波面は散亂原子内で可成り歪曲せられる。

この二つの理論處理に關聯してゐる散亂を夫々歪曲或は非歪曲散亂と記す。歪曲のおこる場合とおこらない場合の區別は散亂曲線の性質から明らかである。歪曲波よりの散亂曲線は廻折像を想像させる様な山や谷を現す。然るに非歪曲波散亂曲線は角度の増加と共に單調に減少する。

Huygens の定理を用いた理論は波が原子を通過した後殆んど歪められない場合によく合ふ。即ち電子に結合してゐるド・ブローイ波長が有效原子半径  $r_0$  と同程度の大であるとき最も有效である。 $\lambda_0 \gg r_0$  の時には光學上の Mie-Debye の方法に倣つた理論の方が有效である。第2圖はアルゴンに對する散亂曲線で二つの型の散亂を示してゐる。第2圖の計算に際して場は Thomas-Fermi の計算値を用いた。高速度電子散亂は非歪曲型に屬し、緩速度電子散亂は歪曲波型を表す。

#### 4 歪を伴ふ波の散亂

Mie-Debye の散亂の波動論は單に散亂原子より大なる半径距離に於ける波の振幅  $\psi$  を見出すことである。 $\psi$  はこの問題に關する Schrödinger の式の解である。入射線は  $z$  方向に進行する單位振幅の平面波

$$\psi_i = \exp(ikz)$$

に依つて表はす。散亂波  $\psi_s$  は  $r$  及び  $\theta$  の函數である振幅を伴つて散亂原子よりその周囲に擴がる。上式に於て  $k = 2\pi/\lambda = mv/h = 2^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} \pi/h$   $\lambda$  はド・ブローイ波長である。この二つの波の和

$$\psi(r, \theta) = \psi_i + \psi_s$$

は Schrödinger の式

$$\nabla^2 \psi + (k^2 - 8\pi^2 m V(r)/h^2) \psi = 0$$

の解である。 $V(r)$  は散亂原子の球狀對稱なポテンシャルの場である。Schrödinger の式はこの儘では直接に解けない。原子の場  $V(r)$  が  $r$  の簡単な函數で表されてゐない時に解けない。上式の歪曲波及び非歪曲波にも有效な解が Faxen 及び Holtsmark<sup>2)</sup> によつて得られた。

Faxen 及び Holtsmark の解法によれば  $\psi$  はより小なる振幅の級數に展開する<sup>1)</sup>。先づ入射線に就て展開するに  $\psi_i(r, \theta)$  を  $\theta$  及び  $r$  の函數に分ける。

$$\psi_i(r, \theta) = \theta(\theta) g(r)/r$$

入射光線に對する Schrödinger の式は  $V(r) = 0$  と置いて得られる。

$$\nabla^2 \psi_i + k^2 \psi_i = 0$$

この式は解は

$$\psi_i(r, \theta) = C_i \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) g_n(r)/r$$

$g_n$  は次の微分方程式の解である。

$$d^2 g_n / dr^2 + (k^2 - n(n+1)/r^2) g_n = 0$$

$n$  は解中にて整の指數であるが更によく考へるに物理的な意味を持つてゐる。入射線の電子に結合してゐる角運動量の量子數である。入射電子波は夫々異つた角運動量子數  $n$  に關聯した項よりなる級數に展開出来る。各々の項は Legendre の係數  $P_n(\cos \theta)$  によつて定まつた角分配を表す。各々の展開項は粒子理論に於ける衝突パラメーター  $P$  と同様な役割をする。

同様な計算が散亂波に就ても行はれ

$$\phi_s(r, \theta) = C_s \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) G_n(r)/r$$

$G_n$  は下の式の解である.

$$d^2 G_n / dr^2 + \{k^2 - 8\pi^2 m V(r) / h^2 - n(n+1) / r^2\} G_n = 0$$

適当な境界条件を入れて計算すれば散亂波の振幅の分配を與へるが、 $\phi_s$  は散亂中心より大なる距離に於て意味があるので原子の場内に於ける  $\phi$  の決定と云ふ困難な問題は棄て、上式の漸近解を求めれば充分である。入射波に対する漸近解は

$$\phi_i(r, r \rightarrow \infty) = C_i \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \sin(kr - n\pi/2) / kr = \exp(ikz)$$

散亂波の漸近解も入射波と同一形を取るはずである。散亂波が平面波の解と異なるのは不定常数の値を異にする。この常数は位相の遅れの恒数  $\eta_n$  である。位相の遅れの常数  $\eta_n$  を有する散亂波の漸近解は下の如くなる。

$$\phi_s(r, r \rightarrow \infty) = C_s \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \sin(kr - n\pi/2 + \eta_n) / kr$$

$g(r)$  及び  $G(r)$  は原點に於て零である。正弦的であるが、 $r$  及び  $z$  が大なるときには相を異にする。

$G_0(r)$  及び  $g_0(r)$  が散亂原子の内側から外側に向ふ時の舉動は第3圖の如し。圖に於て點線は散亂の場における入射線  $g_0(r)$  を表し、實線は散亂線  $G_0(r)$  を示す。位相の遅れは電子の緩速度のもの程大である。此等の曲線は McDougall<sup>9)</sup> により He に就て Hartree の場の値を用ひて論ぜられた。この位相の遅れが散亂曲線の形に結局重大である。境界条件を満足させる  $C_1, C_2$  を決定し散亂波の振幅を完全に表はすと

$$\begin{aligned} \phi_s(\theta, r \rightarrow \infty) &= (2ik)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (\exp(2i\eta_n) - 1) \\ &\quad \times P_n(\cos \theta) \exp(ikr) / r \end{aligned}$$

單位角内に散亂せられる電子の数はこの振幅の二乗で與へられる。即ち

$$I(\theta) = A^2 + B^2$$

$$\text{此處に於て } A = (2k)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (\cos 2\eta_n - 1) P_n(\cos \theta)$$

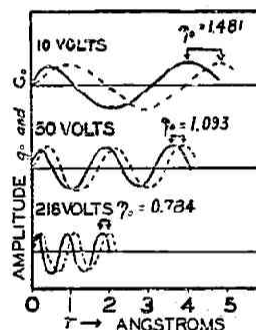
$$B = (2k)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sin 2\eta_n P_n(\cos \theta)$$

### 5 位相のずれ

前章より  $\eta$  が如何に散亂波の解に導入せられたかは明かであるが  $V(r)$  なるポテンシャルの場と  $\eta$  とを關係づける方法を知らねばならぬ。 $G(r)$  から直接に數值的に積分出来るがこれは骨折である。ポテンシャル分布  $V(r)$  を知つて  $\eta$  を計算する數値の近似方法がある。Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffrey<sup>10)</sup> の方法が最も有效である。

$$d^2 G_n / dr^2 + \{k^2 - 8\pi^2 m V(r) / h^2 - n(n+1) / r^2\} G_n = 0$$

上式に於て括弧内の項を  $r$  の函數でないとすると上式の解は簡単に  $\exp(2\pi i \cdot K_r)$  となる。



第3圖 點線は入射波に対する  $g_0(r)$  實線はヘリウム中に於ける散亂波の  $G_0(r)$  を表す。  $\eta_0$  も亦表す。Mc Dougall 5 参照

$K_r^2$  は括弧内の項である。W-K-B-J 方法によれば  $r$  が一波長以上變化せぬ間は  $K_r$  の變化が殆んどないならば  $K_r$  は  $K_r$  の平均値で代表できる。この位相の解は

$$\exp(2\pi i) \int_{r=R_0}^{r=r} K dr$$

$r=R_0$  は  $K$  が零するときの  $r$  の値である。同様な近似を場なき波に就て行ひ、この二つを引算すれば位相のずれ或位置の遅れ  $\eta_n$  が得られる。

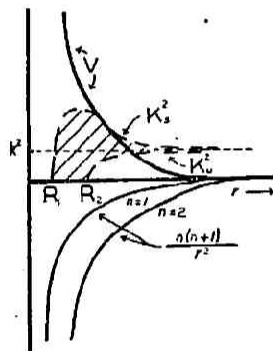
$$\eta_n = \int_{R_1}^{\infty} (k^2 - 8\pi^2 m V(r)/h^2 - n(n+1)/r^2)^{1/2} dr - \int_{R_2}^{\infty} (k^2 - n(n+1)/r^2)^{1/2} dr$$

即ち  $\eta_n = \int_{R_1}^{\infty} K_n dr - \int_{R_2}^{\infty} K_0 dr$

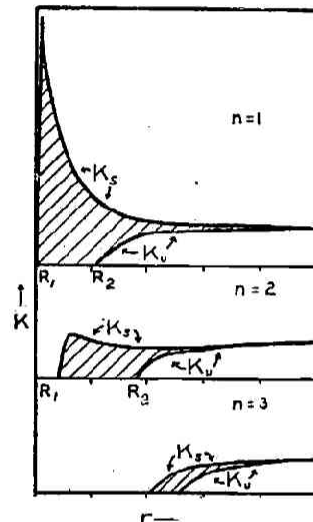
$R_1, R_2$  は  $K, K_0$  が零である様な値である。一般に位相のずれは原子の場が大なれば大なる程大きい。即ち長波長の分配の電子線に対して大きい。此等の原因が位相のずれの数値に干渉する仕方は第4圖、第5圖に圖示する。第5圖中斜影の部分のずれに比例する。

位相のずれの  $k, V, n$  による影響を圖示する點で W-K-B-J 法は優れてゐるが尙近似に過ぎぬ。

この値が何の程度に正確かは第17章に論議し他の近似計算値と比較する。



第4圖 位相のずれに影響する因子が  $r$  と共に變る變り方の圖型



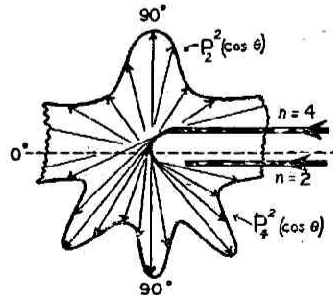
第5圖 曲線の下面積は位相のずれに比例する。角運動量の量子数が大になると減少する

## 6 振幅調和

散亂波の振幅を表す式

$$\psi_s(\theta, r \rightarrow \infty) = (2ik)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (\exp(2i\eta_n) - 1) P_n(\cos \theta) \exp(ikr)/r$$

上に示す如く振幅は各々の項の級数である。これ等の項は調和 (Harmonics) である。各振幅調和 (Amplitude harmonics) は夫自身特別な角分配を持つ小波を表す。假に  $n=4$  は  $n=4$  を有する電子のみよりなる電子線を表しその散亂波は  $P_4^2(\cos \theta)$  である。この假説上の分配を第6圖に表す。各調和が全散亂角度に互つてその電子分配に寄與するのが波動論的な方法の特徴である。この事が一つの衝突パラメーターが直ちに只一つの散亂角に散亂する電子を説明する粒子理論の場合と對照をなしてゐる。調和の振幅は正負の値を持つ。散亂波の強さは種々の調和の干渉の結果として説明出来る。上の事實は  $n$  及び原子の場  $V(r)$  に関係してゐる。この因子は上式に於て  $(2n+1)$



第6圖  $n=2$  及び  $n=1$  の倍音に對する散亂電子の假説的分布

及び  $(\exp(2i\pi n) - 1)$  の二項の中に含まれる。屢々後者の値は一二の調和を除けば零である。散亂の形は結局數箇の Legendre の係數によつて定まる。實際に散亂曲線が一度只一つの Legendre の係數の自乗で表はす形を取る例が多い。

$n$  は角運動量の量子數であるから各調和は粒子としての電子の物理的性質と一致する。 $n$  は粒子理論の衝突パラメーター  $P$  と一致する。假に電子が曲らずに通過するとすれば電子が散亂中心を通る筈の近似的な距離を  $n$  が表すからである。 $n$  の小なる調和は核に近く通過する小なる角運動量の電子に相當し、非常に大なる  $n$  を有する電子は原子の場によつて曲げられない程原子の場より隔つた電子を表す。假に  $n$  が角運動量の  $2\pi$  倍に等しいとすれば、 $k$  の關係式からし  $n$  と  $P$  の間に次式で表す様な關係がある。

$$P = n/k = n\lambda/2\pi = 1.94n/(\text{電子ボルト})^{1/2}$$

$P$  は Å で表す。

### 7 歪曲を伴はぬ散亂

前節に於て散亂波は宛も調和の級數のベクトル和として取扱つたが Born の解法は全く異つた式を導出し散亂の異つた模様を暗示する。

Born に依れば平面波は原子に衝突すると原子内の各容積素片が球狀の小波を放出する。此等の小波は同一の位相であるが容積素片のポテンシャル場の値により定まる異つた振幅を示す。散亂波の合成振幅は箇々の小波の振幅をベクトルとして加へて得られる。此は Huygens 及び Kirchhoff の光學的方法と一致する。

この計算方法に就ては「物理化学の進歩」11390~394(1937)を参照されたい<sup>7,8)</sup>。

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \exp(ikz) - r^{-1}f(\theta)\exp(ikr)$$

上の如く散亂函數  $f(\theta)$  を定義すると計算より

$$f(\theta) = -8\pi^2 m h^2 \int_0^\infty \frac{\sin(4\pi\mu r)}{4\pi\mu r} V(r) r^2 dr$$

これを圖示すると第7圖の如くなる。

### 8 X線の構造因子及び電子散亂

Mon<sup>9)</sup> は原子構造因子  $F$  を誘導して上式を簡單にした。

$$F(\mu) = 4\pi \int \rho(r) \frac{\sin 4\pi\mu r}{4\pi\mu r} r^2 dr$$

$\rho$  は電荷密度である。先の式の  $V(r)$  を

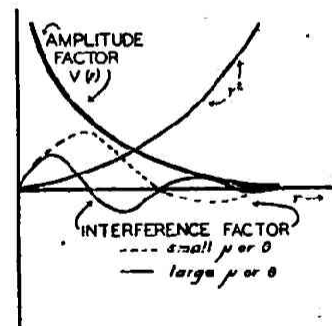
$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} + e^2 \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} d\tau'$$

と置くと計算より

$$f(\theta) = \frac{me^2 Z}{2h^2 \mu^2} - \frac{me^2 F(\mu)}{2h^2 \mu^2}$$

上式の第一項は原子の核外電子がないとすると核によつて生ずる散亂の振幅を表し、第二項は核外電子が原子の中心に位置すると假に想像するとこれより生ずる振幅である。散亂波の振幅は核による波及び負電子による波の和で、兩波共に逆二乗法則により散亂しその中心電荷は各  $Z$  及び  $F$  である。

散亂波の強さは次の如く書くのが便である。



第7圖 散亂電子波の振幅に影響する量の變化の様子の圖示



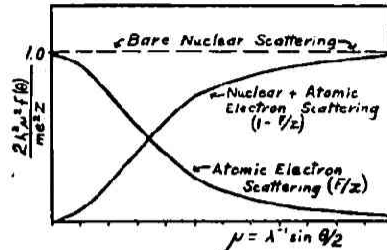
$$I(\theta) = f^2(\theta) = \frac{m^2 e^4 Z^2}{4h^4 \mu^4} \left( 1 - \frac{2F(\mu)}{Z} + \frac{F^2(\mu)}{Z^2} \right)$$

$\mu$  の變化に伴ふ  $f(\theta)$  の挙動は第8圖に示す。

核外電子のない核の散亂と異なる點は原子散亂曲線は電子エネルギーの異なるにつれ又原子の異なるに随つて散亂曲線の形を異にする。第8圖の散亂曲線は大なる散亂角に於ては散亂は核による。小角度の散亂は明瞭に電子散亂及び核散亂に分けられる。

### 9 電子交換を伴ふ散亂

前の二つの散亂理論は入射及び散亂の兩波を表す電子と原子とよりなる系に就て Schrödinger の式の定常状態の解を求めた。この方法では核外電子は散亂原子のポテンシャル場  $V(r)$  に關與するだけで直接散亂現象には與らない。然し Schrödinger の式の  $\psi$  が束縛及



第8圖 原子の外設電子及び裸の核に依つて散亂する波の振幅と裸の核のみの散亂波の振幅の比を  $\mu$  の函數として表す

び散亂電子の波動函數を含む様にすると、式の解中には特に緩速電子の場合には前述の散亂曲線を變化さす効果が生ずる。この効果は、粒子理論に之に對應するものがあるとすれば、衝突電子と原子核外電子の衝突の瞬間に於ける交換によるものである。電子交換には單に散亂される電子の波動振幅函數の外に交換放出電子の  $\psi$  が必要になる。電子交換の一般理論は Oppenheimer<sup>10)</sup> の展開する所でその後 Feenberg<sup>11)</sup>, Massey 及び Mohr<sup>12)</sup> によつて擴張せられた。

電子交換理論の散亂問題への應用を考へると原子状水素の散亂が比較的に簡単な例である。 $\psi(r_2)$  を束縛電子に關する波動函數とし、 $F(r_1)$  を衝突電子の波動函數とする。同様に  $G(r_2)$  を追出された束縛電子を表す波動函數、 $N(r_1)$  を置換つた衝突電子の波動函數とする。衝突後交換が起らぬ時は

$$(r_1^2 + r_2^2 + E + e^2/r_1 + e^2/r_2 + e^2/r_{12})\psi_e(r_1, r_2) = 0$$

で表す。 $\psi_e(r_1, r_2) = \psi(r_2)F(r_1)$  に展開出来る、交換の起る場合は波動方程式は

$$(r_1^2 + r_2^2 + E + e^2/r_1 + e^2/r_2 + e^2/r_{12})\psi_e(r_1, r_2) = 0$$

同様に下の如く展開する  $\psi_e(r_1, r_2) = G(r_2)N(r_1)$

上の二式の漸近解は

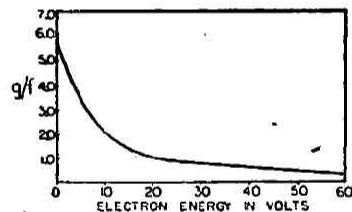
$$F(r_1) = \exp(ikz) + f(\theta)r^{-1}\exp(ikr)$$

$$G(r_2) = g(\theta)r^{-1}\exp(ikr)$$

若し電子が區別し得るならば、散亂数は單に  $f^2$  に比例し、放出数は  $g^2$  に比例する。散亂波の強さは  $I(\theta) = |f + g|^2$  になる。然し波動函數は非對稱であるので放出電子波動振幅と散亂電子波動振幅の組合せ方に或る規約がある。次の如き組合せが許される<sup>13)</sup>。

$$I(\theta) = \frac{3}{4}|f + g|^2 + \frac{1}{4}|f - g|^2$$

放出電子の波動の影響が小さい時には  $g \rightarrow 0$  になる上式は非交換の時には  $I(\theta) = f^2(\theta)$  に歸する。 $g$  及び  $f$  波動の相關的な影響は第9圖の  $f$  及  $g$  の計算曲線から明である。放出電子波動  $g$  の影響は  $g/f$  の比として衝突電子エネルギーの函數として圖示してある。この結果は Mohr が Born の近似解を用ひて  $\theta = 0^\circ$  に於ける水素中の散亂を計算した。交換の經過は電



第9圖  $0^\circ$  に於て水素を用いた時の電子交換振幅  $g$  と非交換振幅  $f$  との比。Massey 及び Mohr 12参照

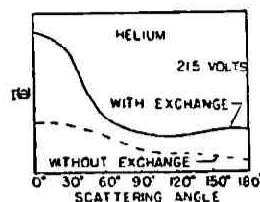


子の速度の小的时候一番影響が大きい。第10圖にては Feenberg による He の電子交換、非交換の散亂曲線を示す。

### 10 初期の測定

一定の角度から電子散亂を研究する方法は Hughes 及び Jones<sup>10)</sup>(1926), 及び R. Kollath<sup>15)</sup>(1928)によつて工夫せられた。90°の散亂角に散亂する電子数に就て測定せられ、衝突電子のエネルギーは種々變化させた。實際此等の觀測者は一定角度に於ける電子散亂に生ずる Ramsauer 吸收係数の分數を測定した。Dymond<sup>16)</sup>(1927)は測定を凡ゆる角度に亙つて行ふ工夫をした。この方法は回轉電子砲を衝突室に入れて行ふのである。砲はガラス摺合せを通じて外部から操作される。その装置は第11圖に示してある。Dymond の最初の實驗は不幸にも衝突室のシールドが不完全の爲にその結果が不正確であつた。これは後に Harnwell<sup>17)</sup>(1928)によつて明らかにされた。當時他に Dymond 及び Watson<sup>18)</sup>による實驗、Harnwell<sup>19)</sup>, Arnot<sup>20)</sup>, McMillen<sup>21)</sup> 及び Rose<sup>22)</sup>によるものがある。此等の實驗は寧ろ小角度範圍10°—60°位に就て行ひ、電子エネルギーの範圍も8—200電子ボルト位である。

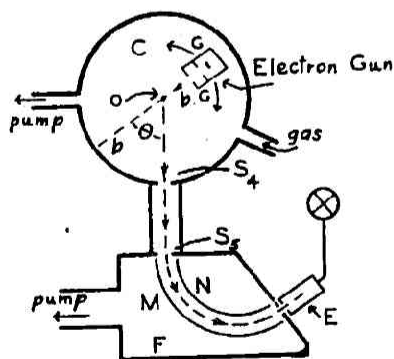
1931年 Bullard 及び Massey<sup>23)</sup>, Arnot<sup>24)</sup> 及び Pearson, Arquist<sup>25)</sup>は角範圍を120°に擴張した。その結果散亂曲線が廻折像を暗示する様な形をもつ興味ある發見をした。この事實は電子の波動性の證據として擧げられた。Faxen 及び Holtsmark<sup>3)</sup>(1927)の電子散亂理論が之に先立つこと數年に發展してゐたこと、又廻折曲線を豫想さす結果が論議されてゐたことも興味のある事實である。理論と計算がこれと密接な關係ある Ramsauer 效果に關する實驗結果と比較しながら行はれてゐた。



第10圖 理論散亂曲線、實線は交換、點線は非交換の場合 Feenberg 11参照

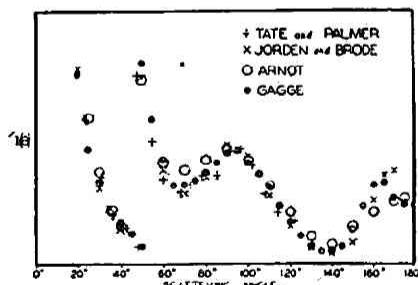
### 11 測定方法

散亂測定は電子線をガスを充した室を貫通させて行ふ。第11圖に示す如く Cはガスを充した



第11圖 散亂装置圖 G 電子砲、C 散亂室  
F 電子エネルギーフィルター、E コレクター、Hughes and McMillen 32参照

衝突室、bb は電子線、この電子線の中、中心 O で散亂したものの中特定の角度  $\theta$  の方向に散亂したものは電子エネルギーフィルター F に入る。此處では所要以外のエネルギーの電子は散亂線より除去する。残りのものはコレクター E に入り、鋭敏な電流記録計、電位計をもつて散亂線中の電子の数を測定する。砲 G を廻轉して砲の方向角度即ち散亂角に關して散亂線の大さを測定する。記録した讀みは補正して衝突行程單位距離、單位立體角、單位電子電流、單



第12圖 水銀を用ひ80ボルト電子の散亂を種々の觀測者の測定した結果の曲線の比較

位容積につき原子毎に就ての散亂線の強さ  $I(\theta)$  を示す。斯様に補正した測定は“散亂係數”“散亂の強さ”“角  $\theta$  に於ける散亂の有効断面”と記す。Brode<sup>26)</sup> の散亂の確率  $S(\theta)$  は  $0^\circ$ 、單位壓力に對して測定したので  $3.56 \times 10^{11} I(\theta)$  に等しい。

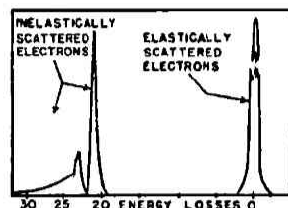
衝突室内の壓力は充分低くし電子が一回以上衝突する可能性を無くした。その壓力は電子の自由平均距離が衝突室の大きと同程度にする様な壓力を擇んだ。第12圖には四人の觀測者<sup>27-30)</sup> が異なる實驗室に於て得た結果が比較してあるが、散亂曲線がよく一致してゐるのがわかる。絶對的な測定値は得られないので上の曲線は任意に重ね合してある。實驗操作の困難さを考慮すれば甚だ満足すべき結果を得てゐる。

衝突電子のエネルギーの變化と共に散亂の強さの變化を測定するのは電子エネルギーと共に電子線の形及びその方向に變化を生ずる爲に測定は一層困難を加へる。細隙が全ゆる電子エネルギーに平等に電子の通過を許すかどうか疑問である。 $I(\theta)$  の絶對測定には裝置の構造に就て精確な智識を必要とするので今迄にこの實驗を行つたのは只一人にすぎぬ。Werner<sup>31)</sup> は絶對散亂を測定する爲に特別な裝置を組立てたが彼の實驗上の誤差は可成り早い電子に對して10%であり、30—40電子ボルトの電子に對しては15—20%であると考へられてゐる。

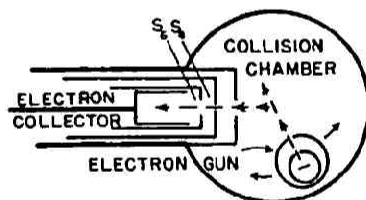
第11圖は Hughes 及び McMillen<sup>32)</sup> の裝置で、電子砲は摺り合せによつて散亂中心の周りを回轉することが出来る。細隙  $S_1-S_2$  は散亂線の方を一定にし、フィルター内へ氣體の漏洩するを防ぐ。MN 上のポテンシャルは靜電場を作つて散亂電子をエネルギー毎に群に分つ。  $10^\circ$  の角度に散亂せられた50電子ボルトのエネルギーの群は第13圖に示す。靜電分析裝置の分解力が優秀であるので非弾性散亂問題の研究は容易に出来る。

第14圖に掲げる Arnot<sup>33)</sup> の裝置と上の裝置の異なる點は電子フィルターの型にある。減速ポテンシャルの方法は弾性散亂電子以外の荷電粒子をコレクターの入口より追出す。 $S_1$  上のポテンシャルは正イオンを追ひ出し。 $S_2$  に適當に掛けしたポテンシャルは非弾性散亂電子を撥返す。分解に當つて靜電分析器と異つてフィルターの大さは關係ないのでこの方法は強さの弱い散亂電流の測定に有効である。 $\theta=7^\circ$  に於て散亂線の減速ポテンシャル分析は第15圖に示す。この曲線は Tate 及び Palmer<sup>28)</sup> が80電子ボルトを用ひて得たもので第14圖と同様な裝置を使用した。

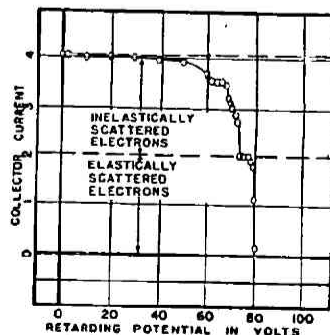
勵起電壓以下の緩速電子を測定するにはエネルギーフィルターは不必要で Ramsauer や Kollath<sup>34)</sup> の用ひた簡單なコレクターで充分である。このコレクターは收集面が大きいので弱い散亂曲線を測定するのに便利である。第16圖に示す如く1から11迄番號付けたコレクターは球帶狀をなし



第13圖 He にて  $10^\circ$  に散亂された50 V 電子のエネルギー分布、靜電分析法による。McMillen<sup>21)</sup> 参照



第14圖 逆電場法を用ひた電子散亂裝置、Arnot<sup>33)</sup> 参照

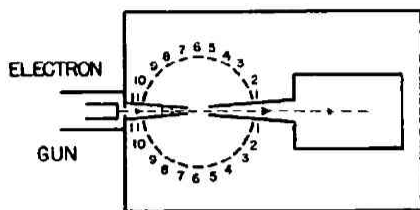


第15圖 逆電場法による水銀中に於ける  $10^\circ$  に散亂した80 V 電子のエネルギー分布

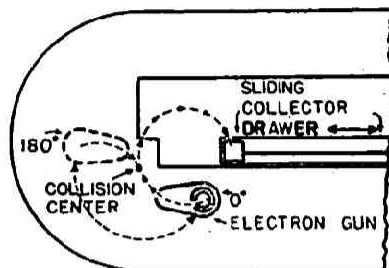
各別々に電位計に繋いである。散亂電流は單位立體角毎より率  $\theta$  から  $\theta + d\theta$  の散亂に比例する。衝突行程の有効距離と球帯が爲す平均立體角は装置の構造から定まる。Ramsauer 及び Kollath は  $0.6\text{ V}$  以下の電子エネルギーの観測が出来た。

圖の11及び14に於て見る如く可動砲装置を用ふる時には電子線の廣さによる制限を小角度に於て受け

る。又大角度に於ては砲の幅によつて散亂電子線を截ると云ふ制限を受ける。



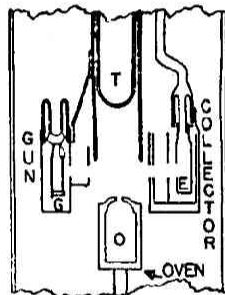
第16圖 Ramsauer 及び Kollath の散亂装置(34参照)



第17圖 圓に垂直な磁場をもつ Gagne の散亂装置(30参照)

Gagne<sup>30)</sup> はこの大角度制限に打勝つ爲に磁場を實驗に

使用した。入射線、散亂線も磁場によつて曲線を描く。第17圖から明かな如く  $180^\circ$  の散亂の場合も砲は散亂線を截らない。この場合コレクターは機械的に外部から移動され弾性散亂電子を集めるのに都合のよい場所に移す。この場合も他の方法と同様にコレクター電流の読みは衝突行程の有効單位距離に換算する必要がある。 $180^\circ$  附近に於ける補正は読みそのものより大である。入射線散亂線の形の正確な測定が大切である。室溫で蒸氣壓の大きくないガスの研究には特殊な散亂室を必要とする。Childs, Massey<sup>35)</sup> の装置は蒸氣を噴射孔より散亂室に噴出する。第18圖に示す如く加熱爐 O の上で噴出させ液體空氣トラップ上に凝縮する。この時間突容積が小さいから蒸氣密度は略一定である。エネルギー分析には減速電壓法を用ふる。Childs と Massey はこの装置を用ひて、カドミウムと亜鉛の散亂を實驗した。擴散噴出法による有効壓力は可成り小さいので McMillen<sup>36)</sup> は衝突室全體が爐の溫度になるやうに設計した。この装置では衝突室に於ける壓力は爐の溫度に相當する壓力を有するので散亂線の強さは充分大きくカリウムの研究では良好な結果が得られた。



第18圖 蒸氣用 Childs 及び Massey 散亂装置(35参照)爐 O より蒸氣は液體空氣トラップ T に凝縮する。電子は砲 G より E に集る

## 12 測定範圍

現在廿五種類の氣體の散亂が観測せられ、此等のガスの原子番號は  $Z=1$  より 80 に及んでゐる。測定角度も  $5^\circ$  から  $180^\circ$  迄に互る。廻折に使用した電子エネルギーは  $0.6$  電子ボルトより  $2000$  電子ボルトに及ぶ。實驗結果の概要は表に擧げてゐる。He, Ne, Ar, に關する Kuper の實驗は測定角範圍が  $0.3^\circ$  から  $6.0^\circ$  迄の狭い範圍であるがその電子エネルギーは  $49,000$  電子ボルトから  $87,700$  電子ボルトの間に及ぶ。

廻折像を表す典型的な散亂曲線は第19圖に示す。この曲線は種々の電子エネルギーに對する水銀の電子散亂を表し Amot による。散亂の強さを極座標を以て圖示すれば第20圖の如くなる。アルゴン中に於ける減速電子散亂に關する Ramsauer 及び Kollath<sup>37)</sup> の實驗結果を示す。

表 I 弾性電子散亂を測定せる氣體

He 34, 41, 42	H <sub>2</sub> 33, 37, 38, 39, 40, 41	PH <sub>3</sub> 38
Ne 33, 34, 38, 41, 43	N <sub>2</sub> 33, 38, 41	H <sub>2</sub> S 38
Ar 32, 33, 34, 38, 44, 47	CO 33, 34	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> 40
Kr 33, 34, 46	CO <sub>2</sub> 33, 38	CCl <sub>4</sub> 46, 52
Xe 33, 40	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub> 49, 50	CHBr <sub>3</sub> 46
Hg 24, 27, 28, 30, 48	CH <sub>4</sub> 33, 38, 50	CF <sub>4</sub> 52
K 36	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> 49, 50	CBr <sub>4</sub> 52
Zn 45	Br <sub>2</sub> 46	
Cd 35	I <sub>2</sub> 46	

## 13 核を主とせる原子の場による散亂

核に近い原子の場は殆んど核に依つて生ずる。その周囲の電子の存在は無視してもよい。r の小なる値に對して場 V(r) は Coulomb の場で表はす。

$$V(r) = Ze^2/r$$

核に近い原子の場は大であるから一番速度の早い電子のみが達し得る。即ち衝突パラメーターの小なるものに限る。衝突パラメーターの小なるものは大なる角度で散亂する。即ち大なる速度の電子の散亂曲線には、大なる角度で散亂する核散亂の存在の證據がある。衝突パラメーター、電子エネルギー及び散亂角度の間には次の關係がある。

$$\tan \theta/2 = 2Ze^2/EP$$

裸の核による散亂電子の分配は前進方向のものが主である。

$$I(\theta) = (Z^2 e^4 \operatorname{cosec}^4(\theta/2)) / 16E^2$$

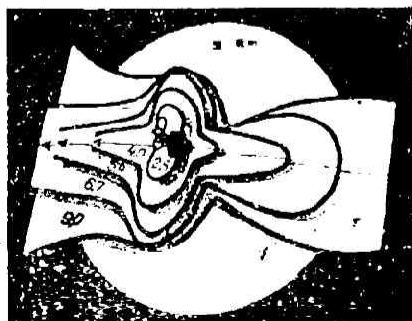
上式によると散亂線は單調に散亂角と共に減少する。曲線の傾斜及び形は凡ての核に就て同一である。Z 及び E には無關係である。

核散亂に就て同様な式が原子散亂に関する Born-Mott の波動理論式からも得られる。

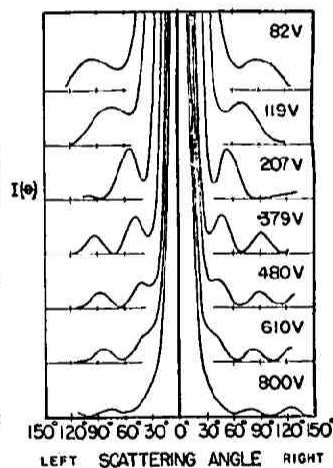
$$I(\theta) = F^2(\theta) = \frac{m^2 e^4 Z^2}{4h^4 \mu^4} \left( 1 - \frac{2F(\mu)}{Z} + \frac{F^2(\mu)}{Z^2} \right)$$

上式に核外電子による影響を表はす項を零に等しとおくと核による散亂波を表す前式と一致する。即ち  $F(\mu) = 0$  であつて第 8 圖に明らかである如く速い電子により起り大なる散亂角に散亂する。

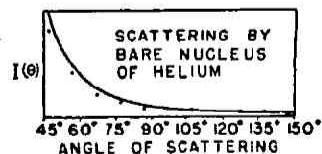
裸の核散亂の實驗には 500 ボルトの電子が He によつて 70° 以上の角度に散亂す



第20圖 極座標を用ひて、散亂電子の角分布模型。34参照散亂ガスはアルゴン



第19圖 水銀の散亂曲線 Arnot (24参照)



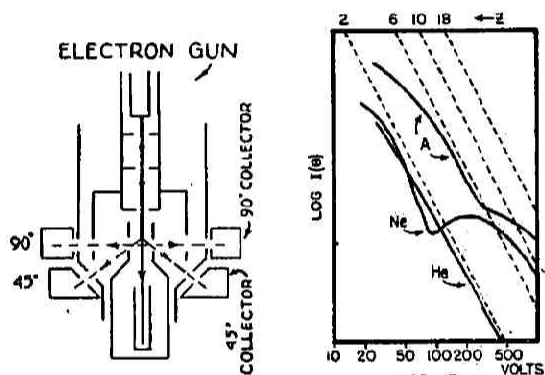
第21圖 500V 電子の He に於ける裸の核散亂實驗、計算による；點線、實驗上；Hughes, McMillan 及び Webb 参照42

るのが見られる。Hughes, McMillen 及び Webb<sup>42)</sup> による結果は核散亂式より計算せられた曲線とよく一致することを第21圖に示す。裸の核による散亂が起る時には電子軌道は常に知れてゐるので電子が如何程深く原子を貫通したか知る事が出来る。粒子理論より最短近接距離を求めると

$$r_{\min} = \frac{2EP^2}{Ze^2 + (Z^2e^4 + 4E^2P^2)^{\frac{1}{2}}}$$

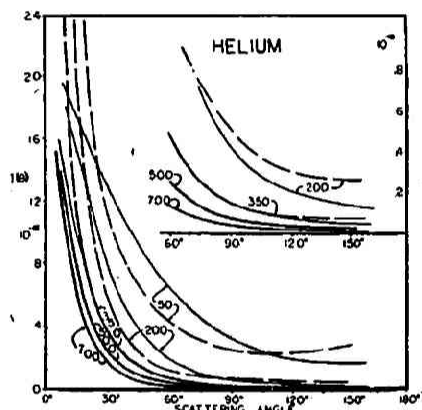
及び  $\tan \theta/2 = 2Ze^2/EP$  の兩式より定まる。90°の角度に He により散亂する500ボルト電子の  $r_{\min}$  は  $r_{\min} = 0.015\text{\AA}$  である。これは原子の電子殻の内部に當る。原子の電子殻の平均半径は  $0.3\text{\AA}$  なることが知れてゐる。

逆二乗法則に従ふ散亂の實驗は外に一定散亂角度に於ける散亂電子線の強さと電子エネルギーの間の變化を測定する方法がある。この強さは先きの式より電子エネルギーの二乗に逆比例する。Werner<sup>53, 54)</sup> は散亂角度90°の電子を測定して上の實驗を試みた。装置は第22圖に示すコレクターは電子線に垂直な平面に於ける中空の輪である。弾性散亂による電子以外の電



第22圖 Werner の装置 (54 参照) 二つの角 45° 及び 90° の散亂線の強さを測定する

第23圖 點線は裸の核の散亂より豫想したるもの實線は Werner (53参照) の観測値で、中心電荷(遮蔽せられた核に相當する)の逆二乗法則散亂に従ふ傾向がある



第24圖 He の實驗散亂曲線 (太い線) が電子の速度の大なる場合 Born の理論曲線 (細い線) に一致することを示す。Hughes, McMillen 及び Webb<sup>42)</sup> 参照

子は減速電圧によつてコレクターに入るのを防ぎ、絶對測定が出来た。散亂線の強さの log と電子エネルギーの log をそれぞれ座標軸に取つて圖示した。これによると散亂が逆二乗の法則に従ふとその曲線は直線となり截片が  $Z^2$  に比例する。第23圖に於て He の場合には電子エネルギーが500ボルトに近づくと逆二乗法則が成立する。その有效電荷  $Z$  は2になり理論によく合致する。Ne に就てみるに逆二乗が成立するのが極めて狭い範圍で30—75ボルトの間である。核荷電は12よりは寧ろ2を表し有效散亂の場が幾分原子の核外電子殻の外側にある。アルゴンに於ては逆二乗法則散亂は100—200電子ボルトの間に現れ眞の荷電約6を示す。斯様に一定角度の散亂に於てエネルギーの小なる範圍の散亂のみが逆二乗の法則に従ふ。その時核の荷電は幾分原子核外電子の遮蔽効果 (shield effect) によつて減少してゐる。

#### 14 Born 理論を支持する實驗的證據

ヘリウムを用ひた實驗結果より Hughes, McMillen 及び Webb<sup>42)</sup> は散亂が Born の法則に従ふのみならず種々の電子エネルギーの電子の測定より Born 法則の成立する極限電子エネルギー

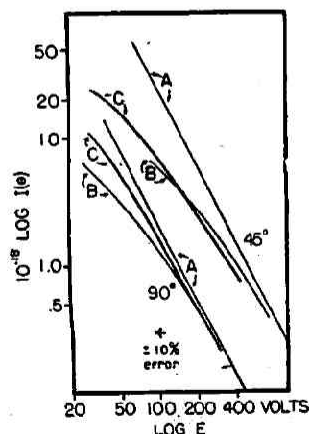
ギーを決定することが出来た。第24圖には測定角度を $10^\circ$ — $170^\circ$ に亘つてとり電子エネルギーを50ボルトより700ボルト迄の測定結果を表す。此等の曲線は Born の理論曲線と比較出来る。太い線は實驗上の點を通じて引かれそれが理論曲線と合致せぬところは破線を以て示す。理論曲線は細い實線にて表し理論曲線も同一尺度で表はしてある。Born の散亂曲線と實驗曲線とがよく一致するのは500ボルト以上の電子に就てである。350ボルト以下の電子に對しては曲線がよく合はない。全體の角度に亘つて散亂の強さが低く出る。

比較的に重い原子に就て Born 理論を試すに理論は實驗曲線とよく合はない。只狭い角度の範圍のみが合ふことが判つた。Jordan<sup>41)</sup>の實驗より水銀は2000ボルト電子が $10^\circ$ から $40^\circ$ の範圍のみ Born の式に合致する。Amot<sup>42)</sup>によれば800ボルトの電子を用ふる時に Ne, Ar, Kr 中には散亂角が $60^\circ$ 迄は一致する。Kuper<sup>51)</sup>は Ar に就て實驗し78000ボルト電子を用ひると實驗曲線は Born 理論曲線と合ふのは $0.3^\circ$ から $3^\circ$ 迄で、ネオンに就ては $1^\circ$ から $3^\circ$ 迄、然るに He に關して $0.2^\circ$ から $3^\circ$ 迄の角範圍はどうしても合はぬことが判つた。

Werner は第22圖の裝置を用ひて一定角度の散亂に就て研究したが、その際衝突行程の長さ及びコレクターの有効大さの測定に非常な注意を拂つて絶対測定をすることが出来た。結果は第25圖に示す如く散亂の強さの log と入射電子エネルギーの log とが座標軸に擇ばれた。圖 A は計算上の核散亂、圖 B は Born の式によるもの、C は實驗値を示す。誤差推定値は10%位ある。電子エネルギーが150ボルト以上だと $90^\circ$ に散亂した電子に就ては實驗値と計算値がよく一致する。 $45^\circ$ の場合は誤差の推定値が更に大きいが150ボルト電子で行つた實驗の實驗結果は推定誤差の範圍で理論曲線と一致する。

### 15 Born 散亂及び原子内の電子分配

Born の散亂理論が正しい時には原子構造因子及び原子内の電子密度  $\rho(r)$  を實驗結果から決定出来る。I を實驗上決定した散亂値とし、R を問題の散亂原子核のみより生ずる散亂値とすると Born の理論式から



第25圖 He 中に於ける一定角の散亂。A、裸の核の理論曲線、C Born 理論、B 實驗、Werner 21 參照

$$I/R = (1 - F/Z)^2$$

$$F = Z - Z(I/R)^{1/2}$$

上式を原子構造因子 F を表す式と聯關させると

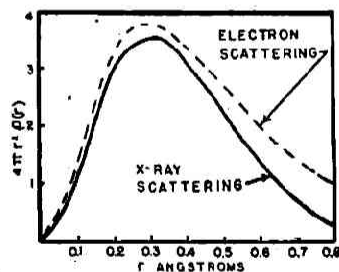
$$4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(4\pi\mu r)}{4\pi\mu} r dr$$

$$= Z - Z(I/R)^{1/2}$$

上式の左邊は  $\sin(4\pi\mu r)$  の級數に展開出来るから上の式は Fourier の reciprocal theorem<sup>56)</sup> より

$$4\pi r^2 \rho(r) = r \int_0^\infty 4\pi\mu (Z - Z(I/R)^{1/2}) \sin(4\pi\mu r) d\mu$$

Morse<sup>56)</sup> は上の關係を用ひて電子密度分布を He に就て求めた。これに用ふる I の實驗値は McMillen<sup>57)</sup> の He に關する結果で、散亂角の小なる値をのみ測定してあるが、Morse の計算電子密度は Wollan の X 線による實驗値とよく一致する。このことは第26圖に明かである。



第26圖 He の電子密度に關する Morse の電子散亂よりの結果と Wollan の X 線による結果の比較



## 16 歪曲波と廻折像

前章に述べた如く衝突電子の波長が原子の有効半径より非常に大なる時には電子が散亂原子によつて散亂せられると散亂波にはつきりと波の歪が現れる。その結果散亂曲線は光の廻折像を想はす様な山や谷が出来る。第4章の理論より散亂の振幅として

$$\psi_s(\theta, r=\infty) = (2ik)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (\exp(2i\eta_n) - 1) P_n(\cos \theta) \exp(ikr)/r$$

が得られ、各  $n$  番目の項、即ち  $n$  番目の調和は  $P_n(\cos \theta)$  により定まる様な角分布を表す。各調和の大きさは項  $(2n+1)$  によつて  $n$  の値に關係し、 $(\cos(2\eta_n) - 1)$  及び  $\sin(2\eta_n)$  なる項に含む位相のずれ  $\eta_n$  によつて定まる。

散亂式  $I(\theta) = A^2 + B^2$

$$A = (2k)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (\cos 2\eta_n - 1) P_n(\cos \theta)$$

$$B = (2k)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sin 2\eta_n P_n(\cos \theta)$$

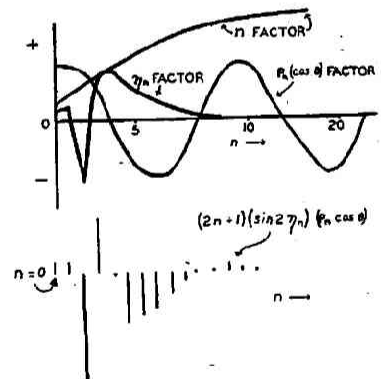
に於ける重要な特性は  $\eta_n$  が  $n$  と共に變化が規則正しいがそれが三角函數で表れてゐる點である。 $n$  が次々の値を取つても  $\eta$  項が不規則に變化する。例へば  $(\cos(2\eta_n) - 1)$  なる項は  $\eta_n$  が  $\frac{\pi}{2}$  の奇數倍に等しい時は常に極大である。その値は2である。 $\frac{\pi}{2}$  の偶數倍に對しては項は0になる。位相のずれを含む第二項  $\sin(2\eta_n)$  は  $\eta_n$  が  $\frac{\pi}{2}$  の奇數倍の時は1で極大であり、 $\frac{\pi}{4}$  の偶數倍のときは0である。随つて  $\eta$  が  $\frac{\pi}{2}$  の奇數倍である様な調和は優勢となり又一方位相のずれが  $\frac{\pi}{2}$  及び  $\frac{\pi}{4}$  の偶數倍に等しい値を持つ様な調和は散亂式より消滅する。

$n$  がその積分値を表はす時の調和の舉動は第27圖に示す。その値は  $\psi_s(\theta, r=\infty)$  の値の實數値に就て計算し、カリウム中で  $30^\circ$  に散亂せられた100ボルト電子を表す。位相のずれは  $n=3$  迄は零の周りに振動する。 $n$  を含む項のみが共に増加する。 $\theta$  を含む項、 $P(\cos \theta)$  は少くとも  $\theta=30^\circ$  から  $\theta=150^\circ$  の範圍は  $n$  と共に正弦波的に變化する。 $\theta^{-1}$  に比例する週期を持つ。調和を構成する三つの項を一緒に乗じた全體としての調和の舉動は圖の下部に表す。最初不規則な變化をした後減衰振動の外観を呈する。

$P_n(\cos \theta)$  の變化の週期が  $\theta^{-1}$  に比例することから小角度の散亂が常に大なる理由が判る。小なる散亂角度ではその週期が大であるので週期が一回終る前に位相のずれは零になり、 $P_n(\cos \theta)$  の正の値のみが残る。これが相集つて大なる散亂振幅を生ずる。これに反して大なる角度では週期が少であるので、多くの振動を促すがそれが一緒に加るとその正負の値が相互に消し合つて非常小さな振幅しか生じない。

## 17 位相のずれとその決定

位相のずれは  $\psi$  なる波が原子の場  $V(r)$  を通過する時にその徑方向の成分  $G$  の位相にずれが出来ることから生ずる。この成分は微分式



第27圖 上圖  $P_n(\cos \theta)$ 、位相のずれの因子及び  $n$  因子の變化を  $n$  の函數として表す。散亂ガスは K、電子エネルギーは 100 電子ボルト、散亂角  $30^\circ$



$$d^2 G_n / dr^2 + (k^2 - 8\pi^2 m V(r) / h^2 - n(n+1) / r^2) G_n = 0$$

の解である。位相のずれは不屈折波に關して測定が出来る。この不屈折波の徑成分  $g$  は

$$d^2 g_n / dr^2 + (k^2 - n(n+1) / r^2) g_n = 0$$

の解である。McDougall<sup>57)</sup> は He に就て上の二式を解いて  $g$  の値及び  $G$  の値を計算した。 $V(r)$  として Hartree の場の値を用いた。その結果は第3圖に示す。圖からずれの大きさは電子の速度の増加と共に減少することが判る。又  $G$  が場によつて影響せられる程度も緩速度の電子の場合に増加する。或る原子の場に對する位相のずれの結果の完全な組は  $k$  の全ゆる値、 $n$  の全ゆる値に對しても與へられたものである。今一組の位相のずれは原子の場を表すから、理論上には少くとも實驗的散亂曲線から位相のずれが決定出来る筈である。これから原子ポテンシャル場  $V(r)$  を得られねばならぬ。實際これが行はれておらぬのはその手續が冗長だからである。

### 正確な方法

正確な方法は勿論適當な境界條件を入れて、

$$\psi_n(r, \theta) = C_n \sum_{l=0}^{\infty} P_{nl}(\cos \theta) G_{nl}(r) / r$$

數值的積分を行ふとよい。Holismark<sup>57)</sup> は嚴密ではあるがやゝ冗長な方法で Ar 及び Kr の原子の場の位置のずれを論じた。彼による場の値は Hartree の場の値でそれに電子による原子の場の歪、即ち分極を補正したものを用いた。McDougall も正確な方法によつたが Hartree の場を分極せずに He に關して用いた。數值的積分の簡易化が Hartree, Kronig 及び Peterson<sup>59)</sup> によつて企てられ機械的勞力を減じた。その方法によれば全ゆる位相のずれが最初に計算した値の (skeleton outline) より得ることが出来た。Cl の原子場に就て正確な位相のずれの膨大な表が造られてゐる。

### W-K-B-J 法

位相のずれを決定する概算法は上の方法に比すると不正確ではあるが屢々計算の簡便な爲に必要になる。Jeffrey による方法は

$$\eta_n = \int_{R_1}^{\infty} (k^2 - 8\pi^2 m V(r) / h^2 - n(n+1) / r^2)^{\frac{1}{2}} dr - \int_{R_2}^{\infty} (k^2 - n(n+1) / r^2)^{\frac{1}{2}} dr$$

の結果を與へる。この解法は  $R_n R_p$  が有限の間隔だけ隔つてゐて、 $R_n R_p$  附近にて最初の積分項が  $r$  と同様に變化することが假定の基礎になる。 $n=0$  に對しては後者の假定は眞でない。Wentzel, Kramers<sup>60)</sup> 及び Brillouin の同様な方法 W.K.B. 法ではこの假定はより一層有効に近づく。この方法にては  $n(n+1)$  は  $(n+\frac{1}{2})^2$  によつて置き換へる。この二つの方法は  $n$  の大なる値に對して一致する。この二つの方法を一つにする方が便利であるので W-K-B-J 法と呼ぶ。上式の積分項の根  $R_n$  及  $R_p$  を調べるとよく判るが  $n$  の大なる場合この二根は粒子理論に現れる二つのよく知つてゐる量即ち最短近接距離及び電子衝突パラメーター  $P$  に對應する。この電子は角運動量が  $n$  でそのエネルギーは  $E$  である。その結果 W-K-B-J 法では位相のずれは二つの特別な徑距離に存在するポテンシャル場の函數としてあらはされてこの距離は粒子理論に於ける最短近接距離と衝突パラメーターに相當する。斯して位相のずれを散亂の場の特別な區域と關聯させることが出来る。W-K-B-J 法は更に Henneberg<sup>61)</sup> によつて Thomas-Fermi の場と關聯させて擴張有力なものとなつた。Henneberg は簡單な數值上の方法で原子番號  $Z$  の位相のずれを原子番號  $Z'$  のずれから得ることが出来た。Henneberg の關係を用ひると原子

の場が正確に Thomas-Fermi の場で表せる場合その原子の位相のずれが判る。Henneberg は水銀に就て位相のずれの可成完全な組を定めた。

### Born の方法

位相のずれを知る第三の方法は Mott<sup>61)</sup> によるもので Born の假定が有効であるときにのみ正確な値を示す。散亂式が正確に Born の式に等しければ位相のずれは次式の通りである。

$$\eta_n = \pi \int_0^{\infty} r V(r) (J_{n+\frac{1}{2}}(kr))^2 dr$$

$J(kr)$  は Bessel の函数である。Born の假定が正しい時にのみ此式は正しいからこの方法は  $\eta_n$  が 0.5 ラジアンより小なる場の時のみ満足な結果を與へる。

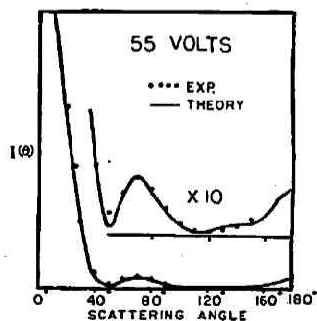
### Allis 及び Morse の方法

この方法<sup>62)</sup> は特に簡単な原子の場により生ずる  $\eta_n$  を知るのに適してゐる。この原子の場は荷電  $Ze$  の核の周りを  $-Ze$  の荷電が距離  $r_0$  の距りで球殻をなして圍んでゐるものとする。位相のずれはパラメーター  $x=kr_0$  及び  $\beta = (Zr_0/2)^{\frac{1}{2}}$  の函数になる。但し上の量の物理的な意味は量  $x$  は球殻の圓周が入射線のド・ブROI波長となす比で、 $\beta$  は有効荷電  $rV(r)$  の積分の平方根で、原子散亂能力の尺度を表す。位相のずれの資料は原子の形、 $x$  の値によつて示されてゐるが、又原子有効荷電  $\beta$  に對して表に作られてゐる。

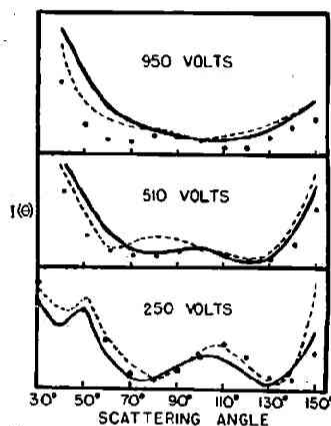
種々の近似計算法の正確度をしる爲に Amot 及び Baines<sup>63)</sup> は各々計算法によつて位相のずれの値を計算した。この計算に際して只一つの場合を凡ての場合に用いた。Kr の

位相ずれを知る爲に Hartree の場を用ひて54ボルトの電子の場合の資料が第二表である。Amot 及び Baines は  $n$  が非常に大か又特に小なる場合を除けば Jeffrey の方法が満足な結果を示すことを結論した。J-W-K-B 法は大なる  $n$  の値に對しては駄目だが、これを補ふのに Born の概算法がある。第二表に見る如く位相のずれが0.5 ラジアン以下の時には Born の方法は非常に満足な結果を示す。第三表に明な如く W-K-B-J 法では小なる原子番號の原子に對して一層有効である。

不活性ガスに就て  $\eta_n$  の値が比較してある。 $\eta_n$  の決定に大なる誤差が免れ得ぬので Hughes 及び Bilinsky<sup>64)</sup> は  $\eta_n$  の値を二つの電子エネルギーに就て正確に知



第29圖 分極 Hartree 場を用ひたクリプトンの散亂曲線。實驗値は點で表す。Webb 47 参照



第28圖 クリプトンの散亂曲線。實線は Hartree の場による。點線は Thomas-Fermi 場による。實驗値は點で表す。Webb 64 参照

表 II Kr の散亂に於ける54ボルト電子の位相のずれの計算値

位相	正確な決定	Jeffrey の近似値	Born の近似法
0	9.696	10.612	
1	7.452	7.710	
2	4.469	4.748	
3	1.228	1.410	0.779
4	0.445	0.557	0.414
5	0.143	0.190	0.144

ると凡ての電子のエネルギーに関し  $\eta_0$  の値を決定する延長法を案出した。

近似法の有効性を總括するに Arnot, Baines が指摘してゐる様に位相のずれの計算に於ては  $\eta_0$  の値に對して正確な方法がよい、 $\eta_0 < 0.5$  に對しては Born の方法がよいと云ふ事になる。この他の場合には W-K-B-J 法が一番便利で満足な結果を示す。

表 III 不活性氣體の位相のずれ ( $n=0$ ;  $k=0$ )

$k=0$	正確な方法	W-K-B-J 法
Kr	$4\pi$	$4\pi + 2.74$
Ar	$3\pi$	$3\pi + 1.04$
Ne	$2\pi$	$2\pi + 0.852$
He	$\pi$	$\pi + 0.180$

Allis 及び Morse の方法は、簡単な原子の場の型が使はれるが、位相のずれが吸収係数の實驗事實とよく一致する。併してこの位相のずれの値は正確な方法より得た結果と比較したとき、非常に大きな差がある。特に  $n$  の値が小なるときにはその差が甚しい。Allis 及び Morse の計算法を Ar 散亂曲線の場合に試みると電子が 16-40 ボルトのエネルギーを持つときに實驗曲線によく一致する。この結果は他の原子散亂には應用出来ない。計算値の資料の不足からこの簡単な模型が何の程度迄散亂曲線の主な特性を書き得るか批判するのは難しい。

### 18 現在の原子の場の資料の比較

電子散亂の最有效な理論と實驗結果を比較するときには附隨的な因子を考慮に入れて後に理論と實驗の差異を批判的に判斷する必要がある。この因子は直接、間接に散亂式に表れる原子の場の資料  $V(r)$  である。實驗値と原子の場の理論値例へば Hartree 或は Thomas-Fermi の値の間に直接に比較が出来る様に實驗上の読みを場の資料  $V(r)$  にかへることが出来たら都合がよいが、その様な變換は數學的に困難であるので理論上の原子の場より計算で得た散亂曲線を實驗上よりの散亂曲線と比較する。

#### Hartree の場

一般にこの場を用いた散亂曲線は實驗曲線とよく一致する。Kr に對する散亂曲線の比較は第28圖に示す。實線は Hartree の値に基く理論曲線である。この計算は Hughes 及び Bilinsky<sup>64)</sup> 等が位相のずれを計算する Jeffrey の方法を用ひて計算した。

#### 分極した Hartree 場

緩速電子の場合には散亂曲線は分極した原子場に非常に影響される。Holtsmark<sup>57)</sup> は場に分極項の補正を加へて Hartree の場は理論吸収係数を實驗値によく一致させた。分極項を補正した Hartree の場に基く Kr の散亂曲線は第29圖に示す。Webb<sup>47)</sup> の實驗曲線とよく一致する。Bullard 及び Massey<sup>41)</sup> も亦分極の補正を加へた Hartree の場を用ひて Ar による緩速電子散亂の實驗結果を理論とよく一致させることに成功した。

#### Thomas-Fermi の場

Thomas-Fermi の場を用ふると Hartree 場による程よい散亂曲線は得られない事は豫想される。

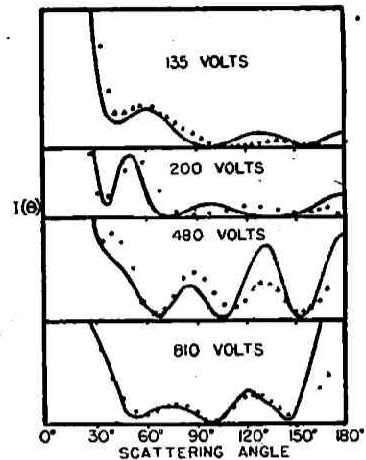
此等二つの場より得られる理論曲線が第28圖に鎖線は Thomas-Fermi 場により、實線は Hartree の場による曲線を表す。位相のずれは Jeffrey の方法で計算した。實驗曲線の大體の形は Thomas-Fermi の場による理論曲線に現れるが、Hartree の場を用ふると一層よく合致する。Henneberg<sup>6)</sup> は位相のずれでもつて Thomas-Fermi 場を試してみた。その實驗は水銀<sup>9)</sup> に 135-180 ボルト電子を用ひ、アルゴンには 80 ボルト電子、K<sup>36)</sup> には 5-100 ボルト電子を用ひた。

水銀に対する曲線は第30圖に示す。

Thomas-Fermi の場は全く實驗曲線を表すことに成功してゐる。18位の低い原子番号の原子に対する理論曲線は實驗曲線とよく一致する。

Childs 及び Massey<sup>45)</sup> に依れば Zn の場合には Thomas-Fermi の場は徑距離の大な所では不正確である。これに代るものとして改良した Thomas-Fermi の場を用ひた。  $r_0$  を Slater の法則より定まる M 殻の半徑とすると  $r < r_0$  なる場合には  $V(r)$  として Thomas-Fermi の値が用ひられた。  $r > r_0$  の場合には外側の殻の半徑に対しては場の値は零になる様に擴張する。但し Zn の  $r_0$  の値は  $2.1\text{\AA}$  とする。この様な場を用ひて位相のずれを W-K-B-J 法より計算した。理論曲線は實驗上の結果とよく一致する。この計算は 30ボルト 40ボルト 122ボルトの電子に就て行ひ比較した。

理論と實驗の間を關係づけることには成功したが He や H の場合には緩速電子を用ふる とよく一致した結果が出ないことが知られた。これは少くとも第9章に述べた電子交換の影響が考慮に入れてない爲であらう。



第30圖 水銀の散亂曲線、Thomas-Fermi の場を用ふ、Henneberg 参照(6)。實驗値は點で表す。Amot 参照(27)及び Jordan 参照(48)

### 19 廻折像と原子番号

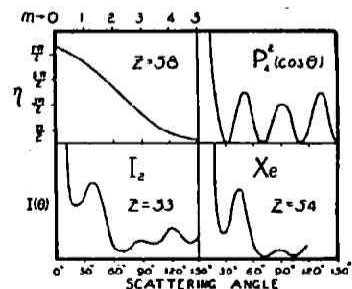
廻折像が原子番号と共に變化する様子はこの廻折に用ひる電子のエネルギーにも關係する。初に價電子殻内で散亂する電子、即ち原子イオン化電壓より大なるエネルギーをもつ電子に就て述べる。それ等の實驗上観測出来る廻折像を調べると各々見覚えのある形をもつこと、尙その形は Legendre の係数の各項に一致することが判る。次の項が認められる。

#### $P_4P_4$ 群

Z の大きな原子の中、よく似た特性を示す散亂曲線をもつものが二つある。夫は  $I_2$  及び Xe である。其等の廻折像は第31圖に示す。  $50^\circ$ ,  $90^\circ$  及び  $120^\circ$  に三つの山があり、  $30^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $110^\circ$  及び  $150^\circ$  に谷がある。此等が  $P_4P_4$  群と呼ぶのは  $P_4^2(\cos \theta)$  の圖を見ると明らかである。即ちこの圖は  $50^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  に三つの山を表す。實驗上の山の高さは  $P_4^2(\cos \theta)$  に表れる山の高さが同一でないが、その理由は Legendre の係数によることは明瞭である。之等二の元素  $I_2$  ( $Z=53$ ) 及  $Xe$  ( $Z=54$ ) は水銀を除けば  $Z=48$  より以上の今迄研究せられた全部である。位相のずれは  $n$  の函數として圖に示してある。此等の結果は水銀の結果と Kr の結果の間に内挿して得られる。その曲線は原子番号  $Z=58$  の原子の位相のずれを表はす。

#### $P_3P_3$ 群

Zn, Br, Kr の實驗散亂曲線は二つの山をもつ。之は  $P_3P_3$  群に分類する。この實驗散亂曲線が  $P_3^2(\cos \theta)$  によく似てゐるのは  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  に山を表し  $40^\circ$ ,  $90^\circ$  及び  $130^\circ$  に谷を表すことで

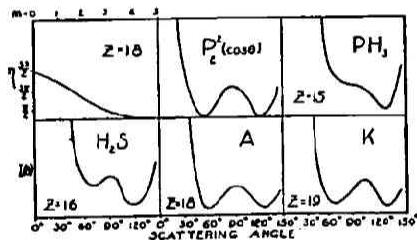


第31圖  $P_4^2(\cos \theta)$  と  $I_2$  及び Xe の實驗散亂曲線の比較。他に  $Z=58$  に対する位相のずれ實驗結果電子エネルギー  $\sim 80$  eV 子ボルト

ある。實驗上の曲線と  $P_0^2(\cos \theta)$  は第32圖に示す。Z=30のZn は次の群の  $P_2P_2$  の特性を示す傾向がある。Z=30よりZ=48迄の間現在知られてゐるのは上の三つの原子に就てである。(Cl(Z=48)に關する實驗は80電子ボルトをもつ電子に就てではない)。位相のずれの曲線は Kr の場合に關して表す。

### $P_2P_2$ 群

$PH_3$ ,  $H_2S$ , A 及び K の氣體は只一つの山を持つ散亂曲線を表す。この山は  $90^\circ$  の位置にある。實驗散亂曲線が  $P_2^2(\cos \theta)$  函数と圖に於て比較してある。散亂の強さは大體 Z<sup>2</sup> に比例する故に、多原子分子  $PH_3$ ,  $H_2S$  中の原子の中散亂曲線の性質の決定に重大な役割をするのは重い方の原子 P 及び S である。従つて此等の散亂曲線は原子散亂曲線として考へ得る。實驗曲線は明らかに  $P_2P_2$  型である。Z=15 の P の曲線は  $90^\circ$  の山が殆んど消えてゐる。P が Ne から



第33圖  $P_2^2(\cos \theta)$  と  $PH_3$ ,  $H_2S$ , A 及び K の實驗散亂曲線との比較。他に Z=18の位相のずれ; 80電子ボルト

原子番號が5だけ隔つてゐることを考へると驚くに及ばぬ。Ne の廻折像は  $P_1P_1$  型で  $90^\circ$  に谷を表す。Cl も亦  $P_2P_2$  群に屬す。その散亂曲線は

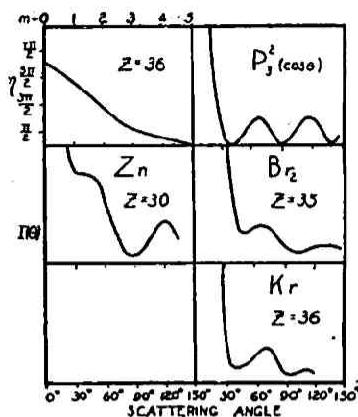
$CCl_4$  の測定から得られる。位相のずれが n と共に變化する様子は圖に示す様に K に Thomas-Fermi の場を用ひて計算出来る。

### $P_1P_1$ 群

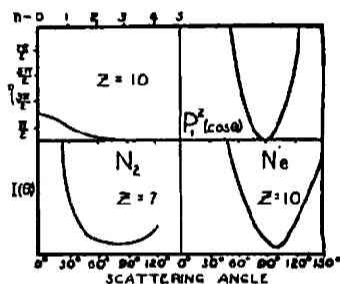
この群には N, Ne 及び多分 C をも入る。散亂曲線は  $90^\circ$  に於て深い谷を表す。又  $P_1^2(\cos \theta)$  に等しい  $\cos^2(\theta/2)$  で表される。位相のずれの曲線は Ne の場合を示し、He と Ar の兩方の位相のずれの間に介在する。

### $P_0P_0$ 群

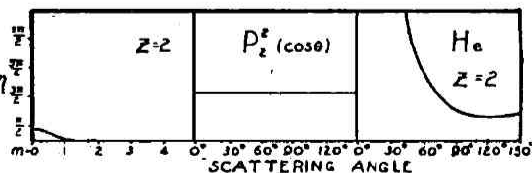
He の場合が之に屬する。實驗曲線は平坦で  $P_0^2(\cos \theta)$  を表すが C の場合も大部分之によるものと思はれる。第35圖に見る如く。He に關して理論廻折曲線は平坦であるが、交換の効果によつて曲線が角度と共に大きく變化する。位相のずれの曲線は He に關して McDougall が計算した。此等の廻折型及び Z と共に變化する位相のずれの資料を研究すれば直ちに説明がつく。Arnot<sup>(4)</sup> によつて初めて解析せられた



第32圖  $P_2^2(\cos \theta)$  と Zn, Br<sub>2</sub> 及び Kr の實驗散亂曲線の比較。他に Z=36に對する位相のずれの實驗結果; 80電子ボルト



第34圖  $P_2^2(\cos \theta)$  と  $N_2$  及び Ne の實驗散亂曲線の比較。他に Z=10の位相のずれ; 80電子ボルト



第35圖  $P_0^2(\cos \theta)$  と He の實驗散亂曲線の比較。他に Z=2の位相のずれ; 80電子ボルト

方法に従ふことにする。Born の散亂式及び Faxen-Holtmark の式が電子エネルギーの或る狭い範囲では同一のものとする。この範囲では Born の理論は正確で入射線は大して歪みを蒙らぬものとする。この範囲で結合してゐる位相のずれは小さく  $\frac{1}{2}$  ラジアンを超ぬものとする  $\eta_n'$  を Born の要求を満足する位相のずれとして 0.5 ラジアン又はそれより小とする。  $\exp(2i\eta_n') = (1 + 2i\eta_n')$  であるから散亂波の振幅を表す式は

$$B^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2ik} \sum (2n+1)(2i\eta_n') P_n(\cos \theta)$$

Born の散亂の強さは下の式の如くなる。

$$B = \frac{1}{4k} \left( \sum (2n+1)(2i\eta_n') P_n(\cos \theta) \right)^2 = \frac{me^4}{4h^2 \mu^2} \left( 1 - \frac{F}{Z} \right)^2$$

然し振幅調和の一部分のみが  $\eta_n < 0.5$  なる条件を満足する位相のずれを持つ故に、散亂線の振幅は  $\eta_n' < 0.5$  である調和と  $\eta_n > 0.5$  なる調和の和として書き表し得る。振幅は下式に與へられる。

$$I^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp(2i\eta_n - 1) P_n(\cos \theta) - \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{n=n'} (2n+1) \times \exp(2i\eta_n' - 1) P_n(\cos \theta)$$

$n'$  は Born 散亂の必要条件を満足させる最長位相ずれの添字である。 $\eta_n''$  は實際の位相のずれと Born の式に必要な位相のずれの間の差である。

即ち  $\eta_n'' = \eta_n - \eta_n'$  とすると上式は書直して

$$I^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{n=n'} (2n+1) \exp(2i\eta_n'' - 1) P_n(\cos \theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{n=n'} (2n+1) \exp(2i\eta_n' - 1) P_n(\cos \theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{n=n'+1}^{\infty} (2n+1) \exp(2i\eta_n' - 1) P_n(\cos \theta)$$

及び

$$I = (B^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{n=n'} (2n+1) \exp(2i\eta_n'' - 1))^2$$

cross product を無視すると散亂式は

$$I = B + k^{-2} \sin^2 \eta_0 P_0^2(\cos \theta) + 9k^{-2} \sin^2 \eta_1 P_1^2(\cos \theta) + 25k^{-2} \sin^2 \eta_2 P_2^2(\cos \theta) + \dots$$

若し  $n$  の凡ての値に對して位相のずれが 0.5 ラジアンより小さいならば、それは  $Z=1$  の場合には偶然に眞であるが、上式は第一項を除けば凡て零になる。散亂曲線は角と共に單調に減少する Born 散亂曲線になる。 $Z$  が増加すると各次々の  $n$  に對して  $\eta$  は 0.5 ラジアンより大きい値になるに至る。第 31 圖より第 35 圖迄を見ると位相のずれの資料より明らかなる如く  $Z$  が大きくなるともう一つ 0.5 より大きな位相のずれをもつ  $\eta$  がます。各  $\eta > 0.5$  に對して上式に於てもう一つの項が有效になり、その結果より散亂曲線は次の連續した形を表す。

B

$$B + P_0 P_0$$

$$B + P_0 P_0 + P_1 P_1$$

$$B + P_0 P_0 + P_1 P_1 + P_2 P_2$$

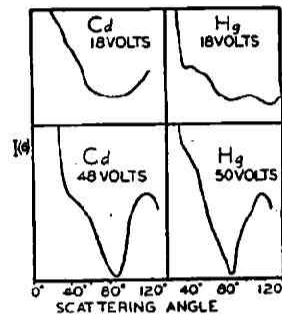


この様な廻折像の系列が實驗曲線に存在すること既に前に述べた。像の型は最大  $n$  の Legendre の係数によつて定まる。Amot によるとこれより低い  $n$  の位相のずれは略々同様な因子をもつのでその調和の和は平滑な曲線にすぎない。勿論低い方の  $n$  の値に對する位相のずれは常に  $\frac{\pi}{2}$  の偶數倍を表し其等の位相の因子を相殺することがある。Born 散亂と Legendre の係数から生ずる背後曲線は角が小さい時に明瞭に顯れる。

## 20 重い原子の廻折像

位相のずれの資料及び散亂曲線は  $Z$  と共に規則正しく變化する。之は原子散亂場が  $Z$  と共に規則正しく變化する證據と考へられる。併し Cd と Hg の散亂曲線を比較すると散亂曲線が上に述べた様に  $Z$  に關して規則正しく變化すると云ふことは無い。42ボルトの電子を用ひて行つた散亂實驗に於てはその散亂曲線は兩方一致した特性を表すが、このことは原子番號の差を考へると非常に驚異に値することである。第36圖は Childs 及び Massey<sup>35)</sup> による廻折曲線である。この外觀的な異常は Childs 等は次の如く説明してゐる。電子が散亂せられる場合は此等二原子にとつて實際に同一の大きさを持ち、原子の中心から同一距離にある爲であるとしてゐる。この解釋は第四表をみると得られる。二原子の外殻の主なる特徴を表してゐるがイオン化電壓の大きさから電子は Hg の O 殻に依つて、Cd の場合は N 殻によつて散亂するらしい。兩方の殻の半径及びイオン化電壓が等しいから散亂曲線がよく似た型をとることが理解出来る。

ANGLE OF SCATTERING



第36圖 50電子ボルトの散亂電子による水銀とカドミウムの散亂曲線の相似性。Childs 及び Massey 参照35

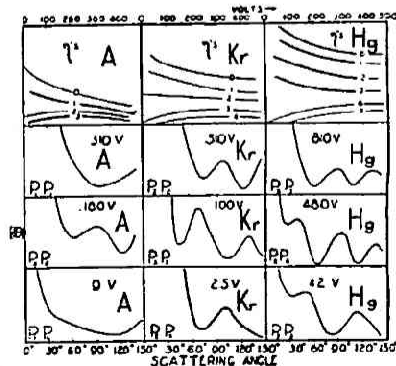
第四表 Hg-Cd の原子の電子殻の比較

殻		電 子 数		半 徑 (Å にて)		電離電壓(ボルトにて)	
Hg	Cd	Hg	Cd	Hg	Cd	Hg	Cd
P	O	2	2	2.15	1.97	10.4	8.95
O	N	18	18	0.50	0.46	250	250
N	M	32	18	0.17	0.15	1800	1500

18ボルト位の緩速電子は外殻に於て散亂せられる。外殻はこの二つ原子は似ておらぬ。不一致な曲線と與へる。第36圖は18ボルト電子の曲線である。

## 21 衝突電子エネルギーと廻折像の變化

種々の電子エネルギーに對する位相のずれの資料を簡単に調べてみると電子のエネルギーの變化に對する像の變化の様子が判る。Born の近似が成立する様な疾い速度の電子は  $\eta$  の値が0.5ラジアン以下である。この位相のずれは電子速度が遅い程大きくなる。之は略 (F) に比例する。段々遅い電子を考へると位相のずれが臨界角0.5ラジアン以上になる場合が起る。このことは Born 散亂の外に更に散亂曲線中に現れる。それも



第37圖 散亂電子のエネルギーに伴ふ廻折像の變化。及び關聯した位相のずれ



Born の散亂が極小である様な角の範圍即ち大なる角度に於て表れる。

更に電子エネルギーが低くなると位相のずれが増加を続けるとは限らない。或る限界  $\eta_n$  及びそれ以上の凡ての位相のずれは零になる。この限界  $\eta$  は原子によつて異なる。Hg の場合は  $n=4$  であり、Kr の場合には  $n=3$ 、Ar に於ては  $n=2$ 、He では  $n=1$  である。第37圖に於て、Hg、Kr 及び Ar の位相のずれの實驗事實の略圖である。電子の速度が緩くなると  $\eta$  の値は上の様に變化するので近似的に電子速度の緩くなるに従つて第五表に示す形の系列を表すことが豫想せられる。

第五表

Ar	Kr	Hg
B	B	B
$B + P_0 P_0$	.....	.....
$B + P_0 P_0 + P_1 P_1$	$B + \dots P_2 P_2$	$B + \dots P_3 P_3$
$B + P_0 P_0 + P_1 P_1 + P_2 P_2$	$B + \dots P_2 P_2 + P_3 P_3$	$B + \dots P_3 P_3 + P_4 P_4$
$B + P_0 P_0 + P_1 P_1$	$B + \dots P_2 P_2$	$B + \dots P_3 P_3$

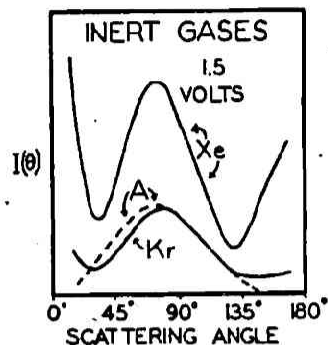
B は前掲の如く Born 散亂を表す。E が零に近づく時には  $\eta$  の或る値も零に近づくから、前に豫示してある像は逆行する。實驗的に見出した像は第五表の如し。然し凡ゆる調和の合成像を表すより寧ろ最大の調和による型の像を表すことは豫想せられ得る。この事は第19章でも觀察せられた事實である。A に関して緩速電子(310ボルト)に表れる曲線は  $P_1 P_1$  型であるが100ボルトになると型は更にもう一つ高次の  $P_2 P_2$  になる。9ボルト電子の場合は更に再び  $P_1 P_1$  に逆戻りする。

Kr の場合には第37圖より明らかである様に  $P_2 P_2 - P_3 P_3 - P_2 P_2$  の順に變化する。水銀では  $P_3 P_3$  型から  $P_4 P_4$  型に變化し更に  $P_3 P_3$  に戻る。最高次の像の型は E が小になると先づ第一に零になる様な  $n$  に属するものである。

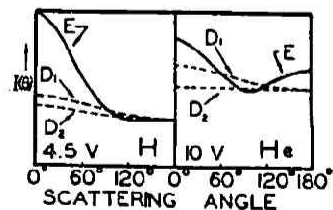
非常に低速電子では何が起るか考へて電子エネルギーと廻折像の變化の觀察をするとこの様な電子に對しては散亂は常に外側の價電子殻で起る。この様に低い電子エネルギーに對して實驗事實が完全に揃つておらぬ。Ramsauer 及び Kollath<sup>40)</sup> の不活性ガスに就ての觀測が低速電子散亂の一例である。第38圖には1.5ボルト電子の Ar, Kr 及び Xe 中の散亂曲線を示しめる。その曲線は凡て同一の像を表してゐる。原子價に關係する散亂の場の特徴を表してゐる。この曲線は閉殻による緩速電子の散亂を表すものと考へられる。

## 22 電子交換及び分極效果

非常に緩速な電子及び He, H の如き散亂原子の場合には正確な Hartree の場を用ひた Faxen-Holtmark の理論によつても實驗と全く一致する様な散亂曲線を得ることは出来ない。この差異は次の原因でおこる。軽い原子及び小エネルギー電子に二つの效果が顯著になる。その一つは第9章に述べた交換の效果であり、他は散亂原子によつて促された原子分極の作用である。第10圖に示す様に電子交換效果の影響を説明する理論曲線はこの影響を考へてない理論曲線より



第38圖 不活性ガス中の緩速電子散亂の曲線の相似性 (40参照)



第39圖 E 電子交換效果を伴ふ理論散亂曲線、D<sub>1</sub> Hartree の場を用ひた非交換理論曲線、D<sub>2</sub> Allis 及び Morse の場を用ひた非交換理論曲線

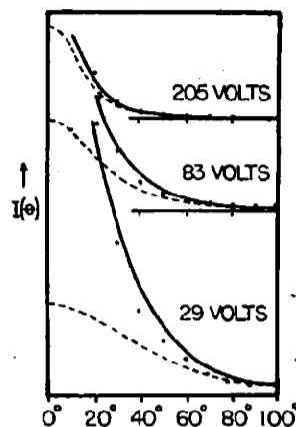
も角度と共に大きく變化する。Massey 及び Mohr<sup>12)</sup> の交換理論による曲線は第39圖に示す。

第39圖には交換を作らぬ Faxen-Holtmark の理論曲線が示してある。この計算には Hartree の場を用ひた。場を代へても非交換理論曲線は満足な結果を示さない。これは Allis 及び Mohr の場を用ひた散亂曲線より明瞭である。Massey 及び Mohr の電子交換曲線のみが實驗曲線が必要とする一般的な形を示すことが判る。Born 及び Faxen-Holtmark の何れ理論に於てもその理論式の誘導に際して原子の場が靜的なもので、散亂電子によつては擾亂も分極も蒙らないことを想像した。實際この假定は眞でない緩速電子と原子衝突がおこるときには分極効果がそれに伴ふ。Holtmark<sup>57)</sup> によれば緩速電子の吸収係数は非分極原子の場を用ひては説明出来ない。吸収の實驗上の曲線に理論曲線を合すには Hartree の場にこの効果を表す項を追加する必要がある。彼による分極した場は原子の中心から相當距つた所では  $r^{-1}$  に比例して減少する。分極を補正した場を用ふると觀測曲線に非常によく一致した散亂曲線が得られる。第29圖に示す。

分極は  $r^{-1}$  に比例して減少するから原子より遠く隔つた所では靜的原子の場より大きくなる。

斯の様に考へると靜的な原子に比較すると分極を受けた原子は球殻をもう一つ附加して持つてゐるものと考へられる。この球殻は更に散亂電子を收容せしめるし又今迄考へた原子の境界の外側に存在してゐる。この附加的な殻に於てはその場は弱い爲に電子を殆んど偏らせない。散亂曲線は小角度の區域に於て増加する。

Massey 及び Mohr<sup>61)</sup> は分極散亂は非弾性散亂電子波及び弾性散亂電子波の相互作用として表はすことが出来ることを明らかにした。H 及び He の散亂に對して解を得てゐる。水素の散亂曲線は第40圖に示して實驗的に定められた點と比較してある。Massey 及び Mohr 分析の興味ある特色は  $\theta=0^\circ$  の散亂に關する豫想である。その解によればこの角度では散亂は對數的に不確定になる。凡ての實驗的な證據はこれを支持する様な散亂を表す。即ち曲線は  $\theta=0^\circ$  に近づくとき急に高まる様になる。



第40圖 水素中に於ける散亂の實驗値が分極効果を作ふ Massey 及び Mohr の理論曲線に一致する。實線 分極、點線 分極なきとき

## 文 獻

- 1) 電子散亂理論の集成に關するもの, E. U. Condon, *Rev. Mod. Phys.*, **3**, 43 (1931); P. M. Morse, *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 577 (1932); N. F. Mott and H. S. W. Massey, "Theory of Atomic collisions" (Oxford Press 1933).
- 2) N. F. Mott and H. S. W. Massey, reference 1, P. 91.
- 3) H. Faxen and J. Holtmark, *Zeits. f. Physik*, **45**, 307 (1927).
- 4) N. F. Mott and H. S. W. Massey, reference 1, P. 19.
- 5) J. McDougall, *Proc. Roy. Soc., A* **136**, 549 (1932).
- 6) W. Henneberg, *Zeits. f. Physik*, **83**, 555 (1933).
- 7) M. Born, *Gött. Nach. P.* 146 (1926); *Zeits. f. Physik*, **38**, 803 (1926).
- 8) N. F. Mott and H. S. W. Massey, reference 1, P. 87 又は L. O. Brockway, *Rev. Mod. Phys.*, **8**, 234 (1936).
- 9) N. F. Mott, *Proc. Roy. Soc., A* **127**, 658 (1930).
- 10) J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.*, **32**, 361 (1928).
- 11) E. Feenberg, *Phys. Rev.*, **40**, 40 (1932); **42**, 17

- (1932).
- 12) H. S. W. Massey, and C. B. O. Mohr, *Proc. Roy. Soc., A* **132**, 605 (1931); *A* **136**, 289 (1932).
  - 13) N. F. Mott and H. S. W. Massey, reference 1, p. 74.
  - 14) A. L. Hughes and L. W. Jones, *Phys. Rev.*, **29**, 214 (1927).
  - 15) R. Kollath, *Ann. d. Physik*, **87**, 259 (1928).
  - 16) E. G. Dymond, *Phys. Rev.*, **29**, 433 (1927).
  - 17) G. P. Harnwell, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **14**, 564 (1928).
  - 18) E. G. Dymond and E. E. Watson, *Proc. Roy. Soc., A* **122**, 571 (1929).
  - 19) G. P. Harnwell, *Phys. Rev.*, **34**, 661 (1929).
  - 20) F. L. Arnot, *Proc. Roy. Soc., A* **129**, 361 (1930).
  - 21) J. H. McMillen, *Phys. Rev.*, **36**, 1034 (1930).
  - 22) D. C. Rose *Can. J. Research.*, **3**, 174 (1930).
  - 23) E. C. Bullard and H. S. W. Massey, *Proc. Roy. Soc., A* **130**, 599 (1931).
  - 24) F. L. Arnot, *Proc. Roy. Soc., A* **130**, 655 (1931).
  - 25) J. M. Pearson and W. N. Arquist, *Phys. Rev.*, **37**, 970 (1931).
  - 26) R. B. Brode, *Rev. Mod. Phys.*, **5**, 258 (1933).
  - 27) F. L. Arnot, *Proc. Roy. Soc., A* **140**, 334 (1933).
  - 28) J. T. Tate and R. R. Palmer, *Phys. Rev.*, **40**, 73 (1932).
  - 29) E. B. Jordan and R. B. Brode, *Phys. Rev.*, **43**, 112 (1933).
  - 30) A. P. Gagne, *Phys. Rev.*, **44**, 808 (1933).
  - 31) S. Werner, *Proc. Roy. Soc., A* **139**, 113 (1933).
  - 32) A. L. Hughes and J. H. McMillen, *Phys. Rev.*, **39**, 585 (1932).
  - 33) F. L. Arnot, *Proc. Roy. Soc., A* **133**, 615 (1931).
  - 34) C. Ramsauer and R. Kollath, *Ann. d. Physik*, **12**, 529 (1932); *Physik. Zeits.*, **32**, 867 (1931).
  - 35) E. C. Childs and H. S. W. Massey, *Proc. Roy. Soc., A* **141**, 473 (1933).
  - 36) J. H. McMillen, *Phys. Rev.*, **46**, 983 (1934).
  - 37) G. M. Webb, *Phys. Rev.*, **47**, 384 (1935).
  - 38) C. B. O. Mohr and F. H. Nicoll, *Proc. Roy. Soc., A* **138**, 469 (1932).
  - 39) A. L. Hughes and J. H. McMillen, *Phys. Rev.*, **41**, 39 (1932).
  - 40) C. Ramsauer and R. Kollath, *Ann. d. Physik*, **12**, 837 (1932).
  - 41) E. C. Bullard and H. S. W. Massey, *Proc. Roy. Soc., A* **133**, 637 (1931).
  - 42) A. L. Hughes, J. H. McMillen and G. M. Webb, *Phys. Rev.*, **41**, 154 (1932).
  - 43) A. L. Hughes and J. H. McMillen, *Phys. Rev.*, **43**, 875 (1933).
  - 44) F. H. Nicoll and C. B. O. Mohr, *Proc. Roy. Soc., A* **142**, 320 (1933).
  - 45) E. C. Childs and H. S. W. Massey, *Proc. Roy. Soc., A* **142**, 509 (1933).
  - 46) F. L. Arnot, *Proc. Roy. Soc., A* **144**, 360 (1934).
  - 47) G. M. Webb, *Phys. Rev.*, **47**, 379 (1935).
  - 48) E. B. Jordan, *Phys. Rev.*, **45**, 47 (1934).
  - 49) E. C. Childs and A. H. Woodcock, *Proc. Roy. Soc., A* **146**, 199 (1934).
  - 50) A. L. Hughes and J. H. McMillen, *Phys. Rev.*, **44**, 876 (1933).
  - 51) J. B. H. Kuper, *Phys. Rev.*, **53**, 993 (1938).
  - 52) S. Hill and A. H. Woodcock, *Proc. Roy. Soc., A* **155**, 331 (1936).
  - 53) S. Werner, *Nature*, **131**, 726 (1933).
  - 54) S. Werner, *Proc. Roy. Soc., A* **134**, 202 (1931).
  - 55) M. Muskat, *Phys. Rev.*, **35**, 1583 (1930).
  - 56) P. M. Morse, reference 1, p. 598.
  - 57) J. Holtsmark, *Zeits. f. Physik*, **66**, 49 (1930).
  - 58) D. R. Hartree, R. de L. Kronig and H. Peterson, *Physica*, **1**, 901 (1934).
  - 59) H. Jeffrey, *Proc. London Math. Soc.*, **2**, 23, 428 (1923).
  - 60) H. A. Kramers, *Zeits. f. Physik*, **39**, 828 (1926).
  - 61) N. F. Mott, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **25**, 304 (1928).
  - 62) W. P. Allis and P. M. Morse, *Zeits. f. Physik*, **70**, 567 (1931).
  - 63) F. L. Arnot and G. O. Baines, *Proc. Roy. Soc., A* **146**, 651 (1934); F. L. Arnot, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32**, 161 (1936).
  - 64) A. L. Hughes and S. Bilinsky, *Phys. Rev.*, **48**, 155 (1935).
  - 65) H. S. W. Massey and C. B. O. Mohr, *Proc. Roy. Soc., A* **146**, 880 (1934).